

1. Рассматривается задача минимизации

$$J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + x_{n+1})^2 \rightarrow \inf_{x \in X}, \quad X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x_n}{n} \geq 1 \right\}.$$

I. Исследовать функционал $J(x)$ на непрерывность, полунепрерывность снизу, выпуклость, сильную выпуклость, слабую полунепрерывность снизу.

II. Описать структуру множества X . Будет ли оно ограниченным? замкнутым? выпуклым? слабо компактным? компактным?

III. Взяв в качестве начального приближения элемент $x_0 = (-1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$, выполнить один шаг метода проекции градиента с шагом $\alpha_0 = 1/4$.

2. Рассматривается задача минимизации

$$J(u) = \int_0^1 u(t)u(1-t) dt \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0,1) : \int_0^1 (u(t) - t)^2 dt \leq 1 \right\}.$$

I. Исследовать функционал $J(u)$ на непрерывность, полунепрерывность снизу, выпуклость, сильную выпуклость, слабую полунепрерывность снизу.

II. Описать структуру множества U . Будет ли оно ограниченным? замкнутым? выпуклым? слабо компактным? компактным?

III. Взяв в качестве начального приближения элемент $u_0 = u_0(t) = t + 1$, выполнить один шаг классического метода Ньютона.

3. Рассматривается задача минимизации

$$J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n - 2x_{n+1})^2 \rightarrow \inf_{x \in X}, \quad X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n - \frac{1}{2^{n-1}} \right)^2 \leq 1 \right\}.$$

I. Исследовать функционал $J(x)$ на непрерывность, полунепрерывность снизу, выпуклость, сильную выпуклость, слабую полунепрерывность снизу.

II. Описать структуру множества X . Будет ли оно ограниченным? замкнутым? выпуклым? слабо компактным? компактным?

III. Взяв в качестве начального приближения элемент $x_0 = (1/2, 0, 3/4, 5/8, 0, \dots, 0, \dots)$, выполнить один шаг метода условного градиента.

4. Рассматривается задача минимизации

$$J(u) = \int_0^1 \left(u(t) \cdot \int_0^t u(s) ds \right) dt \rightarrow \inf_{u \in U}, \quad U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0,1) : \int_0^1 tu(t) dt \geq 1 \right\}.$$

I. Исследовать функционал $J(u)$ на непрерывность, полунепрерывность снизу, выпуклость, сильную выпуклость, слабую полунепрерывность снизу.

II. Описать структуру множества U . Будет ли оно ограниченным? замкнутым? выпуклым? слабо компактным? компактным?

III. Взяв в качестве начального приближения элемент $u_0 = u_0(t) = 3t$, выполнить один шаг классического метода Ньютона.

5. В пространстве $L^2(0, 1)$ рассматриваются функционал $J(u) = \int_0^1 (u(t) + t^2)^2 - tu(t) dt$

$$\text{и множество } U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : \int_0^1 (u(t) - 3t^4)^2 dt \leq \frac{1}{2} \left(\int_0^1 3t^4 u(t) dt \right)^2 \right\}.$$

Записав эту задачу в терминах норм и скалярных произведений, дайте ответ на следующие вопросы:

I. Будет ли функционал $J(u)$ непрерывным? полунепрерывным снизу? выпуклым? слабо полунепрерывным снизу? сильно выпуклым?

II. Будет ли множество U замкнутым? выпуклым? ограниченным? слабо компактным? компактным?

III. Чему равны градиент и гессиан функционала $J(u)$ на элементе $u = u(t) = 3t^4$?

Полагая $u_0 = u_0(t) = 3t^4$, выполните один шаг метода проекции градиента, выбирая шаг $\alpha_0 = 1/12$.

6. В пространстве ℓ^2 рассматриваются функционал $J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(x_n - \frac{1}{5^n} \right)^2 - \frac{x_n}{3^n} \right)$ и

$$\text{множество } X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n - \frac{1}{2^n} \right)^2 \leq \frac{1}{3} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n} \right)^2 \right\}.$$

Записав эту задачу в терминах норм и скалярных произведений, дайте ответ на следующие вопросы:

I. Будет ли функционал $J(x)$ непрерывным? полунепрерывным снизу? выпуклым? слабо полунепрерывным снизу? сильно выпуклым?

II. Будет ли множество X замкнутым? выпуклым? ограниченным? слабо компактным? компактным?

III. Чему равны градиент и гессиан функционала $J(x)$ на элементе $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots)$?

Полагая $x_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots)$, выполните один шаг классического метода Ньютона.

7. Рассматриваются функционал $J(u) = \int_0^1 (u(t) - 3t^4)^2 dt - \frac{1}{2} \left(\int_0^1 3t^4 u(t) dt \right)^2 : L^2(0, 1) \rightarrow$

$$\mathbb{R}^1 \text{ и множество } U = \left\{ u = u(t) \in L^2(0, 1) : \int_0^1 (u(t) - t^2)^2 dt \leq \int_0^1 tu(t) dt \right\}.$$

Записав эту задачу в терминах норм и скалярных произведений, дайте ответ на следующие вопросы:

I. Будет ли функционал $J(u)$ непрерывным? полунепрерывным снизу? выпуклым? слабо полунепрерывным снизу? сильно выпуклым?

II. Будет ли множество U замкнутым? выпуклым? ограниченным? слабо компактным? компактным?

III. Чему равны градиент и гессиан функционала $J(u)$ на элементе $u = u(t) = 3t^4$?

Полагая $u_0 = u_0(t) = t^2$, выполните один шаг метода проекции градиента, выбирая шаг $\alpha_0 = 1$.

8. В пространстве ℓ^2 рассматриваются функционал $J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n - \frac{1}{2^n}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}\right)^2$ и множество $X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x_n - \frac{1}{5^n}\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{3^n} \right\}$.

Записав эту задачу в терминах норм и скалярных произведений, дайте ответ на следующие вопросы:

I. Будет ли функционал $J(x)$ непрерывным? полунепрерывным снизу? выпуклым? слабо полунепрерывным снизу? сильно выпуклым?

II. Будет ли множество X замкнутым? выпуклым? ограниченным? слабо компактным? компактным?

III. Чему равны градиент и гессиан функционала $J(x)$ на элементе $x = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots)$? Полагая $x_0 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{5^n}, \dots)$, выполните один шаг метода условного градиента.